الرياضيات

14

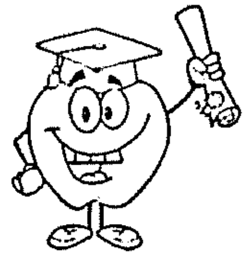
التحليل (5)

16

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي



PLUS

LIBRARY

تناولنا بهذه المحاضرة بعض الأمثلة بالإضافة الى التأويل الهندسي لتكامل استيلجس

المفهوم الهندسي لتكامل استيلجس

لنفرض أنه لدينا تابع معرّف وسيطياً:

$$y=f(t)\ ,\ \ x=g(t)$$
$$[a,b]$$

حيث f مستمر على $[a,b]$ و g متزايد عليه.

لناخذ مثال حول هذا الموضوع:

$$y=f(t)=t^2\ ,\quad t\in[0,3]$$

$$x=g(t)=[t]=\begin{cases}0 & ;0\le x<1\\ 1 & ;1\le x<2\\ 2 & ;2\le x<3\\ 3 & ;x=3\end{cases}$$

قبل البدأ بالتأويل الهندسي لنحل التكامل ولنوجد الناتج التكامل:

بداية نرسم التابعين:

$$I=\int_0^3 t^2\,d[t]$$
$$=(1)^2[g(1+0)-g(1-0)]+(2)^2[g(2+0)-g(2-0)]$$
$$+(3)^2[g(3)-g(3-0)]=1+4+9=14$$

حسب نظرية التجزئة:

$$\int_0^3 x^2\,d[x]+\int_0^3 [x]\,dx^2=\left[x^2[x]\right]_0^3$$

$$\Rightarrow\int_0^3 [x]dx^2=\left[x^2[x]\right]_0^3-\int_0^3 x^2\,d[x]=27-14=13$$

من أجل نقاط الانقطاع نوجد النقط التالية يتبين عن طريقة التأويل الهندسي

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ g(0)=0 \end{cases} \ (0,0)$$

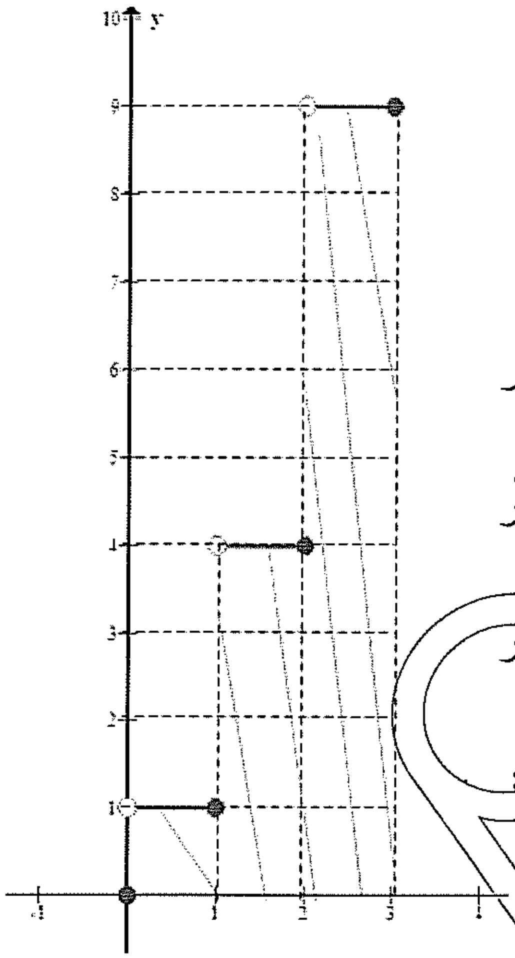
$$t=1 \Rightarrow \begin{cases} g(1-0)=0, f(1)=1 \Rightarrow (0,1) \\ g(1+0)=1, f(1)=1 \Rightarrow (1,1) \end{cases}$$

$$t=2 \Rightarrow \begin{cases} g(2-0)=1, f(2)=4 \Rightarrow (1,4) \\ g(2+0)=2, f(2)=4 \Rightarrow (2,4) \end{cases}$$

$$t=3 \Rightarrow \begin{cases} g(3-0)=2, f(3)=9 \Rightarrow (2,9) \\ g(3)=3 \quad , \quad f(3)=9 \Rightarrow (3,9) \end{cases}$$

ملاحظة:

تم فصل رسمة التابع ψ عن باقي الدوال للوضوح.



ومنه سنستنتج ما هو التابع الجديد بدلالة x وذلك:

1) نأخذ النقاط التي حصلنا عليها

2) نصل بين هذه النقاط بقطع مستقيمة موازية لـــ ox:

نفرغ الدالة عند النقطة $(0,1)$ لان التابع $g(t)$ غير مستمر من اليسار عند الـــ0 ثم نقوم بالوصل مع النقطة $(1,1)$

نفرغ الدالة عند النقطة $(1,4)$ لان التابع $g(t)$ غير مستمر من اليسار عند الـــ1 ثم نقوم بالوصل مع النقطة $(2,4)$

نفرغ الدالة عند النقطة $(2,9)$ لان التابع $g(t)$ غير مستمر من اليسار عند الـــ2 ثم نقوم بالوصل مع النقطة $(3,9)$

بالوصل بين النقط السابقة بقطع مستقيمة نحصل على منحني لتابع ψ:

$$\psi(x)=\begin{cases} 0 & ; x=0 \\ 1 & ; 0<x\le 1 \\ 4 & ; 1<x\le 2 \\ 9 & ; 2<x\le 3 \end{cases}$$

ويكون التأويل الهندسي للتكامل $\int_0^3 f dg$ هو مساحة المنطقة المظللة،

ويكون التأويل الهندسي التكامل $\int_0^3 g df$ هو مساحة المنطقة المتبقية من المستطيل.

للتأكد نقوم بمكاملة التابع الجديد حسب ريمان:

$$\int_0^3 \psi(x)dx = \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 4dx + \int_2^3 9\,dx = 1\times[x]_0^1 + 4\times[x]_1^2 + 9\times[x]_2^3$$
$$= 1+4+9$$

نلاحظ أننا وجدنا صعوبة حتى وصلنا للتابع $\psi(x)$

ولكن اذا كان التابع $g(x)$ قابل للاشتقاق فنحصل على التابع الجديد بسهولة حيث يعطى بالشكل:

$$\psi(x) = f(x).\, g'(x)$$

تمرين:

احسب التكامل التالي:

$$K_3 = \int_0^3 [x] d\lfloor x \rfloor$$

ثم استنتج قيمة التكامل:

$$K_n = \int_0^n [x] d\lfloor x \rfloor$$

ثم برهن أن

$$\int_0^n f(x) d\lfloor x \rfloor = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

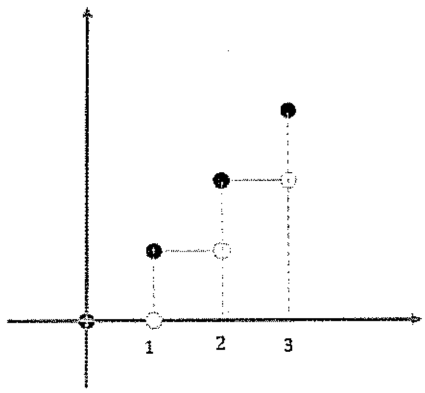
حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = 0 \\ a_1 & : \quad 0 < x \leq 1 \\ a_2 & : \quad 1 < x \leq 2 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_k & : \quad k-1 < x \leq k \end{cases}$$

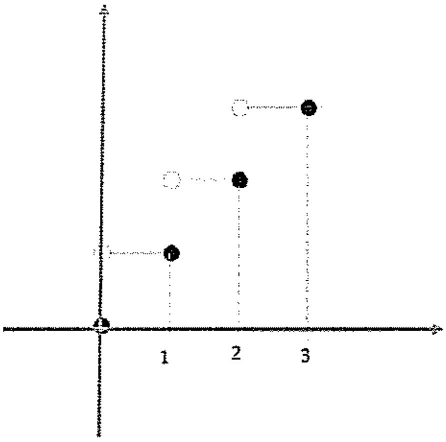
الحل:

قبل البدأ بالحل لنعرف الدالتين $[x]$, $\lfloor x \rfloor$

$$[x] = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & : \quad 1 \leq x < 2 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ n-1 & : \quad n-1 \leq x < n \\ n & \qquad x = n \end{cases}$$



وهي اصغر عدد صحيح لا يتجاوز x



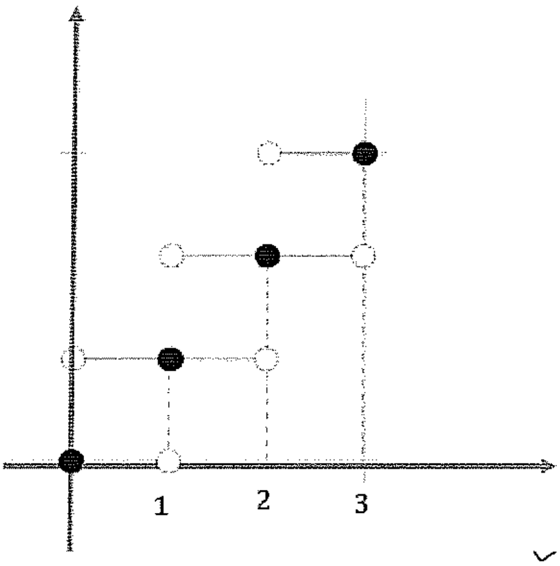
$$\lceil x\rceil=\begin{cases}0\ ;x=0\\ 1\ ;0<x\le 1\\ 2\ ;1<x\le 2\\ \vdots\qquad\vdots\\ n\ ;n-1<x\le n\end{cases}$$

وهو عدد صحيح أكبر أو يساوي x

ملاحظة:

g_i هي القفزة i أي

$g(i)-g(i-1)$



بالعودة الى التمرين:

نلاحظ أن الدالتين لن تكونا غير مستمرتين معنا من نفس الجهة لذلك نستطيع تطبيق النظرية

$$K_3=\int_0^3\lceil x\rceil d\lfloor x\rfloor=f(1)g_1+f(2)g_2+f(3)g_3$$

$$=1+2+3=6$$

$$\Rightarrow K_n=\int_0^n\lceil x\rceil d\lfloor x\rfloor=1+2+3+\cdots+n$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

برهان أن:

$$\int_0^n f(x)d\lfloor x\rfloor=\sum_{k=1}^n a_k$$

الحل:

نلاحظ أن الدالة $[x]$ مستمرة من اليمين عند 1و2و3....

وغير مستمرة من اليسار عند 1و2و3....

بينما الدالة $f(x)$ مستمرة من اليسار عند 1 و2 و3 و....

وغير مستمرة من اليمين عند 1 و2 و3 و....

$$\int_0^n f(x)d[x] = f(1)g(1) + f(2)g(2) + \cdots + f(n)g(n)$$
$$= f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

وهو المطلوب.

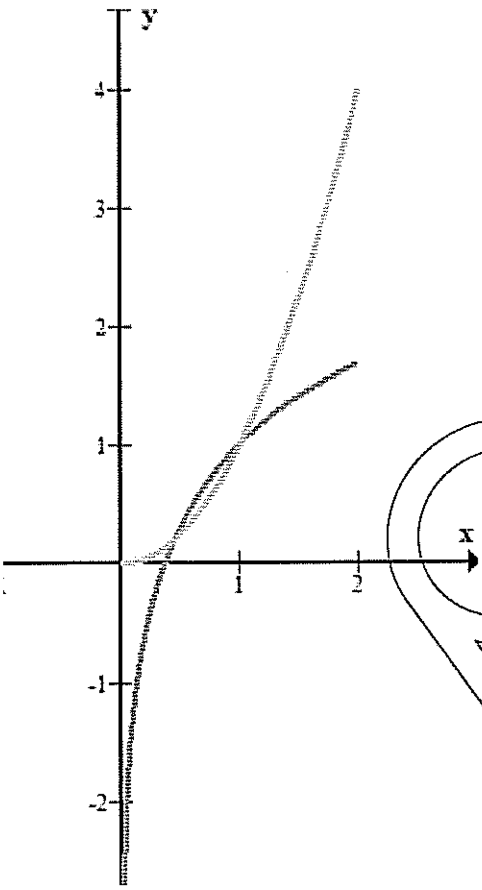
تمارين اضافية من الدكتور:

تمرين1:

1) أثبت أن

$$I_1 = (s)\int_0^2 x^2 d(\ln(x+1)) = \ln 3$$

نلاحظ أن $g(x)$ قابل للاشتقاق على $]-\infty,\infty[$



$$I_1 = (s)\int_0^2 x^2 d(\ln(x+1))$$
$$= \int_0^2 x^2 \frac{1}{x+1}dx = \int_0^2 \frac{x^2-1+1}{x+1}dx$$
$$= \int_0^2 (x-1)dx + \int_0^2 \frac{1}{x+1}dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 + [\ln|x+1|]_0^2$$
$$= [2-2-0] + \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

$$I_2 = (S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\sin x) = \frac{\pi}{2} - 1$$

نلاحظ أن $g(x) = \sin x$ قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي

$$I_2 = (S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \ dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2}(1) - 0\right] + [0-1] = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I_3 = (S)\int_{-1}^{1} x d(\arctan x) = 0$$

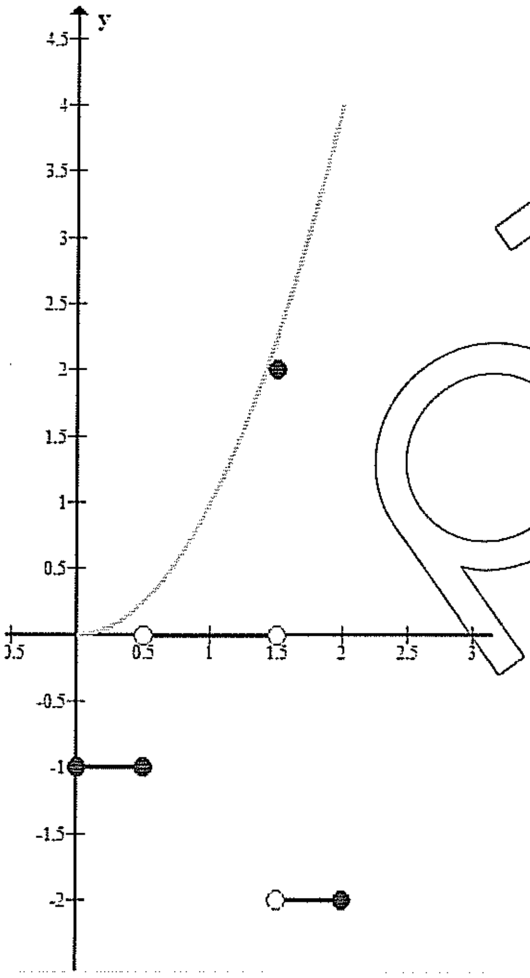
نلاحظ أن $g(x)$ قابل للاشتقاق على $]-1,1[$

$$\int_{-1}^{1} x \frac{1}{x^2+1} dx$$

إن التابع $\frac{x}{x^2+1}$ تابع فردي وبالتالي

$$I_3 = 0$$

تمرين2: اذا كان:



$$g(x) = \begin{cases} -1 \ ; 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 \ ; \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ 2 \ ; x = \frac{3}{2} \\ -2 \ ; \frac{3}{2} < x \le 2 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2$$

فأثبت أن:

$$I = (s)\int_0^2 x^2 \, d(g(x)) = -\frac{17}{4}$$

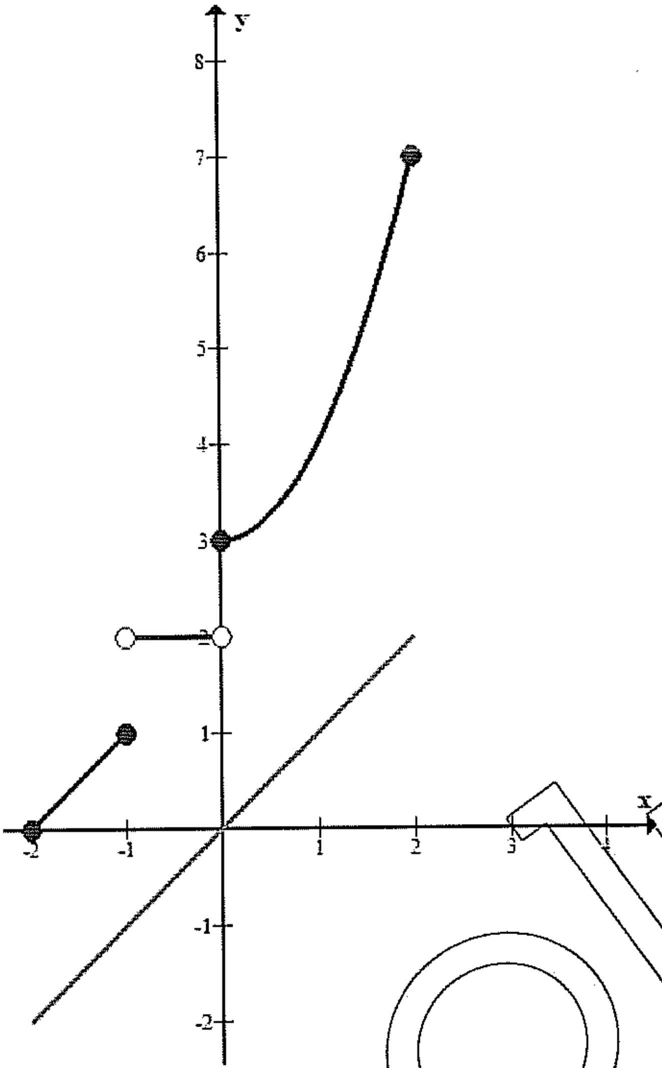
الحل:

$$I = \int_0^2 f dg = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) g_k$$

$$= f\left(\frac{1}{2}\right)\left[g\left(\frac{1}{2}+0\right) - g\left(\frac{1}{2}-0\right)\right] + f\left(\frac{3}{2}\right)\left[g\left(\frac{3}{2}+0\right) - g\left(\frac{3}{2}-0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}[0-(-1)] + \frac{9}{4}[-2-0] = \frac{1}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{17}{4}$$

تمرين3: بفرض أن:



$$g(x)=\begin{cases} x+2 & ;-2\le x\le -1 \\ 2 & ;-1<x<0 \\ x^2+3 & ;\ 0\le x\le 2 \end{cases}$$

فاثبت أن:

$$a)\ \boldsymbol{I=(s)\int_{-2}^{2} xd\big(g(x)\big)=\frac{17}{6}}$$

$$I=\int_{-2}^{2} xd\big(g(x)\big)$$

$$=\int_{-2}^{-1} x\,g'dx+\int_{-1}^{0} x\,g'dx+\int_{0}^{2} x\,g'dx$$
$$+f(-1)[g(-1+0)$$
$$-g(-1-0)]$$
$$+f(0)[g(0+0)-g(0-0)]$$
$$=\int_{-2}^{-1} x\,(1)dx+\int_{-1}^{0} x\,(0)dx$$
$$+\int_{0}^{2} x\,(2x)dx$$
$$+f(-1)[g(-1+0)$$
$$-g(-1-0)]$$
$$+f(0)[g(0+0)-g(0-0)]$$
$$=\frac{1}{2}[x^2]_{-2}^{-1}+0+\frac{2}{3}[x^3]_0^2+(-1)[2-1]$$
$$+0$$
$$=\frac{1}{2}[1-4]+\frac{2}{3}[8-0]-1$$
$$=-\frac{3}{2}+\frac{16}{3}-1=\frac{-15+32}{6}=\frac{17}{6}$$

$$b)\ \boldsymbol{J=(s)\int_{-2}^{2} x^2d\big(g(x)\big)=\frac{34}{3}}$$

$$I=\int_{-2}^{2}x^2d\big(g(x)\big)$$

$$=\int_{-2}^{-1}x^2\,g'dx+\int_{-1}^{0}x^2\,g'dx+\int_{0}^{2}x^2\,g'dx$$

$$+f(-1)[g(-1+0)-g(-1-0)]+f(0)[g(0+0)-g(0-0)]$$

$$=\int_{-2}^{-1}x^2\,(1)dx+\int_{-1}^{0}x^2\,(0)dx+\int_{0}^{2}x^2\,(2x)dx$$

$$+f(-1)[g(-1+0)-g(-1-0)]+f(0)[g(0+0)-g(0-0)]$$

$$=\frac{1}{3}[x^3]_{-2}^{-1}+0+\frac{2}{4}[x^4]_0^2+(1)[2-1]+0$$

$$=\frac{1}{3}[-1-(-8)]+\frac{1}{2}[16]+1=\frac{7}{3}+9=\frac{(7+27)}{3}=\frac{34}{3}$$

$$c)\ \boldsymbol{K}=(\boldsymbol{s})\int_{-2}^{2}(\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{1})\ \boldsymbol{d}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)=\frac{\boldsymbol{55}}{\boldsymbol{3}}$$

$$\int_{-2}^{2}x^2d\big(g(x)\big)$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^2+1)\,g'dx+\int_{-1}^{0}(x^2+1)\,g'dx+\int_{0}^{2}(x^2+1)\,g'dx$$

$$+f(-1)[g(-1+0)-g(-1-0)]+f(0)[g(0+0)-g(0-0)]$$

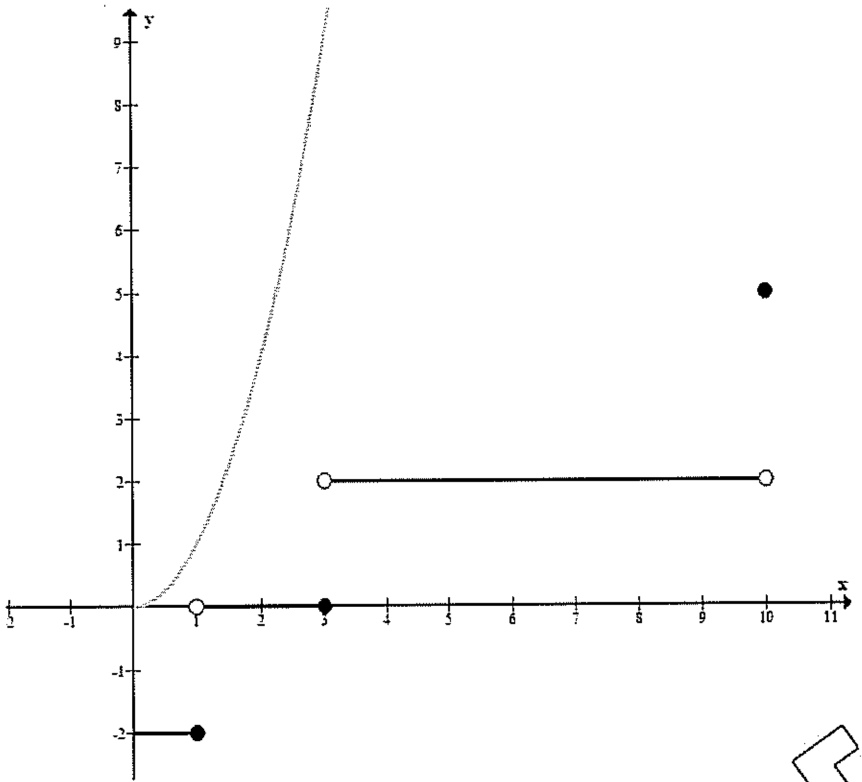
$$=\int_{-2}^{-1}(x^2+1)\,(1)dx+\int_{-1}^{0}(x^2+1)\,(0)dx+\int_{0}^{2}(x^2+1)\,(2x)dx$$

$$+f(-1)[g(-1+0)-g(-1-0)]+f(0)[g(0+0)-g(0-0)]$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^4+x^2\right]_0^2+2[2-1]+(1)[3-2]$$

$$=\left[\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{8}{3}-2\right)\right]+[(8+4)-(0)]+2+1$$

$$=\frac{7}{3}+1+12+3=16+\frac{7}{3}=\frac{55}{3}$$



تمرين4: بفرض أن:

$$g(x)=\begin{cases}-2 & ;0<x\le 1\\ 0 & ;1<x\le 3\\ 2 & ;3<x<10\\ 5 & ;x=10\end{cases}$$

$$f(x)=x^2 \;\; ;x\in[0,10]$$

احسب التكامل:

$$I=(s)\int_0^{10} f(x)d\big(g(x)\big)$$

$$J=(s)\int_0^{10} g(x)d\big(f(x)\big)$$

الحل:

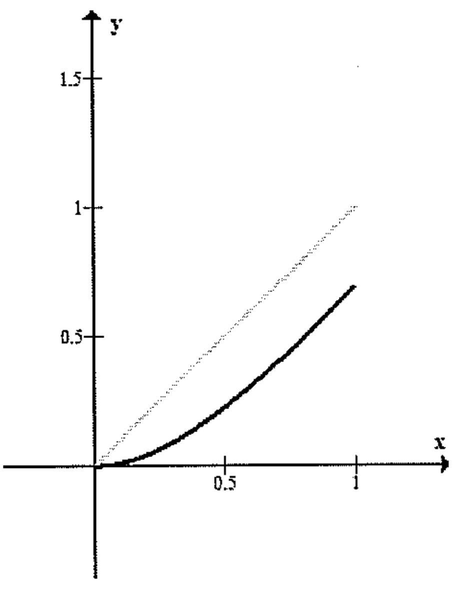
$$I=\int_0^{10} x^2 d\big(g(x)\big)$$

$$=f(1)[g(1+0)-g(1-0)]+f(3)[g(3+0)-g(3-0)]$$
$$+f(10)[g(10-g(10-0)]$$
$$=1[0-(-2)+9[2-0]+100[5-2]$$
$$=2+18+300=320$$

$$J=\int_0^{10} g(x)d\big(f(x)\big)=[f(x)g(x)]_0^{10}-\int_0^{10} f(x)d\big(g(x)\big)$$

$$=[f(x)g(x)]_0^{10}-320=(100)(5)-0-320=500-320=180$$

تمرين 5: احسب التكاملات التالية:



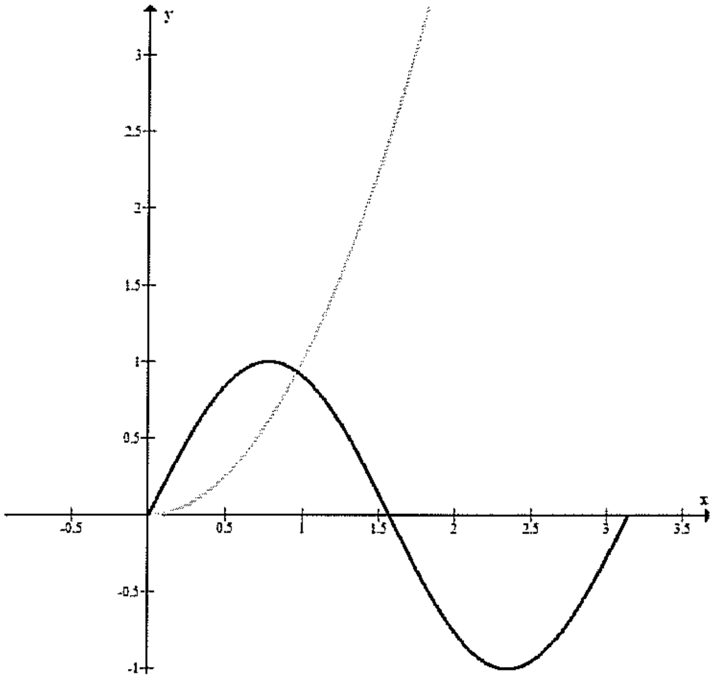
$$\boldsymbol{I_1=(s)\int_0^1 x d(\ln(x^2+1))}$$

$$I=(s)\int_0^1 xd(\ln(x^2+1))=(R)\int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{2(x^2+1)-2}{x^2+1}dx=\int_0^1 \left[2-2\frac{1}{x^2+1}\right]dx$$

$$=2[x]_0^1-2[\arctan x]_0^1=2-2\left[\frac{\pi}{4}-0\right]$$

$$=2-\frac{\pi}{2}$$



$$\boldsymbol{I_2 = (s)\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx^2}$$

$$I_2 = (s)\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx^2$$

$$= (R)\int_0^{\pi} 2x \ \sin 2x \, dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} 2x \ \sin 2x \, dx$$

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2$$

$$dv = \sin 2x \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$I = 2\left\{\left[-\frac{1}{2}x\cos x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2x \, dx\right\}$$

$$= 2\left\{-\frac{1}{2}[x\cos 2x]_0^{\pi} + \frac{1}{4}[\sin 2x]_0^{\pi}\right\}$$

$$= 2\left\{-\frac{1}{2}[\pi - 0] + \frac{1}{4}[0-0]\right\} = -\pi$$

$$\boldsymbol{I_3 = (s)\int_{-1}^{5} arctan\, x \; d6x}$$

$$I_3 = (s)\int_{-1}^{5} arctan\, x \; d6x = 6\int_{-1}^{5} \underbrace{arctan\, x}_{u} \ \underbrace{dx}_{v}$$

$$u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I_3 = 6[x\arctan x]_{-1}^{5} - 3\int_{-1}^{5} \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= 6\left[5\arctan 5 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] - 3[\ln(1+x^2)]_{-1}^{5}$$

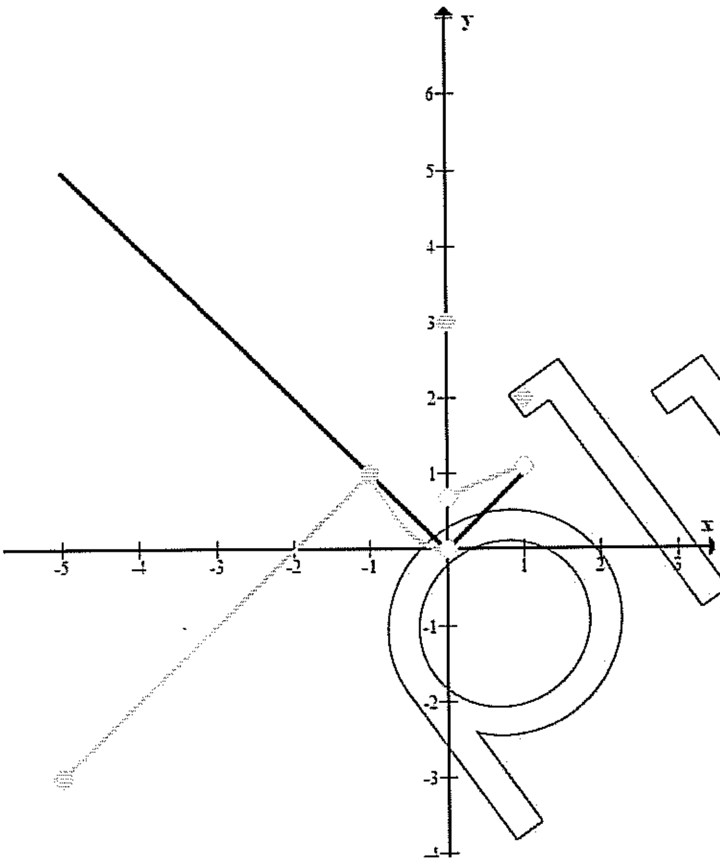
$$= 30\arctan 5 + \frac{3\pi}{2} - 3[\ln 26 - \ln 2] = 30\arctan 5 - \frac{3\pi}{2} - 3\ln 13$$

تمرين6: احسب التكاملات:

$$I = (s)\int_{-5}^{1} f(x)d\big(g(x)\big)$$

$$J = (s)\int_{-5}^{1} g(x)d\big(f(x)\big)$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ ; x > 0 \\ -x; x \leq 0 \end{cases}$$



$$g(x)\begin{cases} x+2 \ ; -5 \leq x \leq -1 \\ x^2 \quad ; -1 < x < 0 \\ 3 \ ; x = 0 \\ \ln(x+2)\,; 0 < x < 1 \\ 2 \quad ; x = 1 \end{cases}$$

الحل:

$$g'(x) = \begin{cases} 1 \quad ; -5 < x < -1 \\ 2x \quad ; -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} \ ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

$g'(x)$ كمول ومحدود على $[-5,1]$

$$I = (s)\int_{-5}^{1} f(x)d\big(g(x)\big)$$

$$= \int_{-5}^{-1} -x\,(1)dx - \int_{-1}^{0} x(2x)dx + \int_{0}^{1} x\frac{1}{x+2}dx + f(0)[g(0+0) - g(0-0)]$$
$$+ f(1)[g(1) - g(1-0)]$$

$$= -\frac{1}{2}[x^2]_{-5}^{-1} - \frac{2}{3}[x^2]_{-1}^{0} + [x]_0^1 - 2[\ln(x+2)]_0^1 + 0 + 1[2 - \ln 3]$$

$$= -\frac{1}{2}[1 - 25] + \frac{2}{3}[0+1] + [1-0] - 2[\ln 3 - \ln 2] + 2 - \ln 3$$

$$= 12 - \frac{2}{3} - \ln\frac{27}{4}$$

$$J = (s)\int_{-5}^{1} g(x)d\big(f(x)\big)$$

$$= [f(x)g(x)]_{-5}^{1} - 15 + \frac{2}{3} + \ln\frac{27}{4}$$

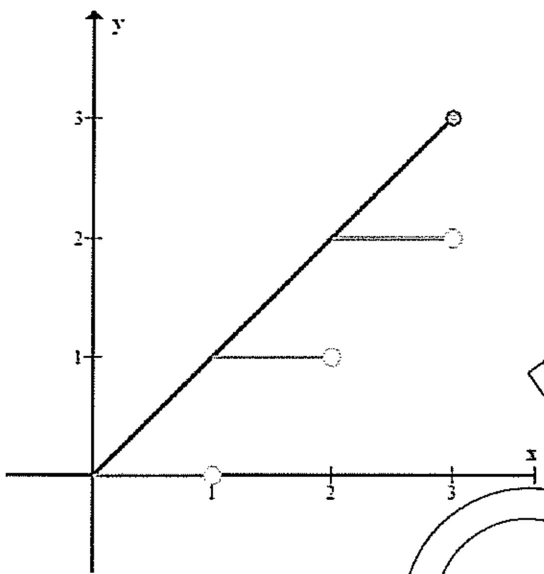
$$= [(1)(2) - (5)(-3)] - 15 + \frac{2}{3} + \ln\frac{27}{4}$$

$$= 2 + 15 - 12 + \frac{2}{3} + \ln\frac{27}{4} = \frac{8}{3} + \ln\frac{27}{4}$$

تمرين7: أوجد $\psi(x)$ التي تحقق

$$\int_0^3 t\, d[t] = \int_0^3 \psi(x)dx$$

مع الرسم



الحل:

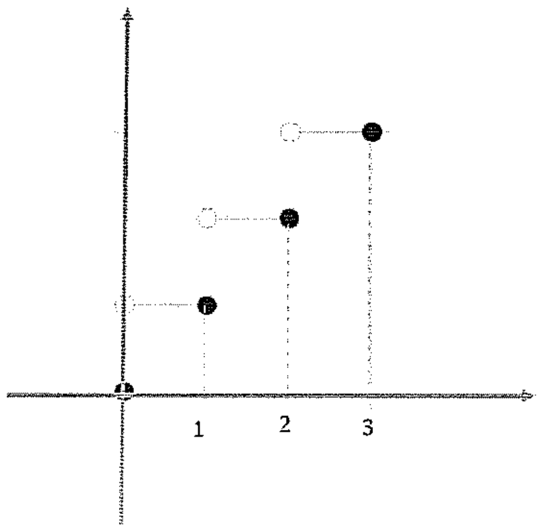
$$y = f(t) \;\;,\;\; x = g(t)$$
$$[a,b]$$

حيث f مستمر على $[a,b]$ و g متزايد عليه.

$$y = f(t) = t \;\;,\quad t \in [0,3]$$

$$x = g(t) = [t] = \begin{cases} 0 & ;0 \le x < 1 \\ 1 & ;1 \le x < 2 \\ 2 & ;2 \le x < 3 \\ 3 & ;x = 3 \end{cases}$$

من أجل نقاط الانقطاع نوجد النقط التالية



$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \;(0,0)$$

$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} g(1-0) = 0, f(1) = 1 \Rightarrow (0,1) \\ g(1+0) = 1, f(1) = 1 \Rightarrow (1,1) \end{cases}$$

$$t = 2 \Rightarrow \begin{cases} g(2-0) = 1, f(2) = 2 \Rightarrow (1,2) \\ g(2+0) = 2, f(2) = 2 \Rightarrow (2,2) \end{cases}$$

$$t = 3 \Rightarrow \begin{cases} g(3-0) = 2, f(3) = 3 \Rightarrow (2,3) \\ g(3) = 3 \quad , \quad f(3) = 3 \Rightarrow (3,3) \end{cases}$$

نصل بين هذه النقاط بقطع مستقيمة موازية لـ ox:

بالوصل بين النقط السابقة بقطع مستقيمة نحصل على منحني لتابع ψ:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ 1 & ; 0 < x \leq 1 \\ 2 & ; 1 < x \leq 2 \\ 3 & ; 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

لنتأكد من ان تكامل الدلة الناتجة حسب ريمان هو نفسه تكامل استيلجس المعطى

$$\int_0^3 \psi(x)dx = 1[x]_0^1 + 2[x]_1^2 + 3[x]_2^3 = 1[1-0] + 2[2-1] + 3[3-2] = 6$$

$$\int_0^3 t\, d[t] = 1g_1 + 2g_2 + 3g_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

انتهت المحاضرة

Math Mad Team

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.